数学Ａ　P150　P151　P152解説

$\boxed{13}$ 分数 $\dfrac{13}{7}$ を小数で表すと　　$\dfrac{13}{7}=1.\dot{8}5714\dot{2}$

小数点以下で，857142 の 6 個の数字の並びが繰り返される。

$$50=6\cdot 8+2$$

であるから，小数第 50 位の数字は 857142 の 2 番目の数字で 5 である。

$\boxed{14}$ (1)　$101010_{(2)}=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=42$

(2)　$2201_{(3)}=2\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=73$

(3)　$127_{(8)}=1\cdot 8^2+2\cdot 8^1+7\cdot 8^0=87$

$\boxed{15}$ (1)　98 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　　$1100010_{(2)}$

$$\begin{array}{r|r l}
2 & 98 & \text{余り} \\ \hline
2 & 49 & \cdots 0 \\ \hline
2 & 24 & \cdots 1 \\ \hline
2 & 12 & \cdots 0 \\ \hline
2 & 6 & \cdots 0 \\ \hline
2 & 3 & \cdots 0 \\ \hline
2 & 1 & \cdots 1 \\ \hline
 & 0 & \cdots 1
\end{array}$$

(2)　2 進数 $111010_{(2)}$ を 10 進法で表すと

$$111010_{(2)}=1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=58$$

58 を 3 で割り，商を 3 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　　$2011_{(3)}$

$$\begin{array}{r|r l}
3 & 58 & \text{余り} \\ \hline
3 & 19 & \cdots 1 \\ \hline
3 & 6 & \cdots 1 \\ \hline
3 & 2 & \cdots 0 \\ \hline
 & 0 & \cdots 2
\end{array}$$

$\boxed{16}$ 整数 a，b をそれぞれ 10 進法で表すと

$$a=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=11$$

$$b=2\cdot 3^2+1\cdot 3^1+1\cdot 3^0=22$$

よって　　$a+b=11+22=33$

33 を 5 で割り，商を 5 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　　$113_{(5)}$

$$\begin{array}{r|r l}
5 & 33 & \text{余り} \\ \hline
5 & 6 & \cdots 3 \\ \hline
5 & 1 & \cdots 1 \\ \hline
 & 0 & \cdots 1
\end{array}$$

答　(ア)　1　　(イ)　1　　(ウ)　3

$\boxed{1}$ □ に入る数を x とすると，各位の数の和は

$$1+2+x+4=x+7$$

$x+7$ が 3 の倍数であればよい。

これを満たす 0 から 9 までの数 x は　$x=2,\ 5,\ 8$

よって，□ に入る数は　2，5，8

$\boxed{2}$ (1)　$\sqrt{140n}$ が自然数になるのは，$140n$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$140n$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

140 を素因数分解すると　$140=2^2\cdot5\cdot7$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=5\cdot7=35$

(2)　$\sqrt{\dfrac{60}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{60}{n}$ がある自然数の 2 乗になるとき，すなわち，$\dfrac{60}{n}$ を素因数分解したときの指数がすべて偶数になるときである。

60 を素因数分解すると　$60=2^2\cdot3\cdot5$

よって，求める最小の自然数 n は　$n=3\cdot5=15$

$\boxed{3}$ 360，1800 を素因数分解すると　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$，　$1800=2^3\cdot3^2\cdot5^2$

よって，360 との最小公倍数が 1800 である自然数は

$$2^a\cdot3^b\cdot5^2 \qquad (a=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ b=0,\ 1,\ 2)$$

で表される。

したがって，求める自然数の個数は　$(3+1)(2+1)=12$（個）

$\boxed{4}$ 360 と 525 の最大公約数を求めればよい。

360，525 を素因数分解すると

$$360=2^3\cdot3^2\cdot5$$

$$525=3\cdot5^2\cdot7$$

これらの最大公約数は　$3\cdot5=15$

よって，求める a の値は　15

$\boxed{5}$ すべての整数は，整数 k を用いて $3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形に表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$$n(n^2+2)=3k\{(3k)^2+2\}=3(9k^3+2k)$$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n(n^2+2)&=(3k+1)\{(3k+1)^2+2\}=(3k+1)(9k^2+6k+3)\\&=3(3k+1)(3k^2+2k+1)\end{aligned}$$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n(n^2+2)&=(3k+2)\{(3k+2)^2+2\}=(3k+2)(9k^2+12k+6)\\&=3(3k+2)(3k^2+4k+2)\end{aligned}$$

よって，いずれの場合も $n(n^2+2)$ は 3 の倍数である。

$\boxed{6}$ $$494-17=477,\ 2243-17=2226,\ 3197-17=3180$$

よって，477，2226，3180 の最大公約数が，求める自然数である。

477，2226，3180 を素因数分解すると

$$477=3^2\cdot53$$

$$2226=2\cdot3\cdot7\cdot53$$

$$3180=2^2\cdot3\cdot5\cdot53$$

これらの最大公約数は　$3\cdot53=159$

よって，求める自然数は　159

$\boxed{7}$ (1) $$33x-14y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=3$，$y=7$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$33\cdot3-14\cdot7=1$　$\cdots\cdots$ ②

①－② から　$33(x-3)-14(y-7)=0$　$\cdots\cdots$ ③

33 と 14 は互いに素であるから，③ より

$$x-3=14k,\ y-7=33k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=14k+3,\ y=33k+7 \quad (k \text{ は整数})$$

(2) $$30x+11y=2 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=-4$，$y=11$ は，$30x+11y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$30\cdot(-4)+11\cdot11=1$

両辺に 2 を掛けると　$30\cdot(-8)+11\cdot22=2$　$\cdots\cdots$ ②

①－② から　$30(x+8)+11(y-22)=0$　$\cdots\cdots$ ③

30 と 11 は互いに素であるから，③ より

$$x+8=11k,\ y-22=-30k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=11k-8,\ y=-30k+22 \quad (k \text{ は整数})$$

$\boxed{8}$ 自然数 n は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$$n=7x+3,\ n=5y+2$$

よって　$7x+3=5y+2$

すなわち　$7x-5y=-1$　$\cdots\cdots$ ①

$x=2$，$y=3$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$7\cdot2-5\cdot3=-1$　$\cdots\cdots$ ②

①－② から　$7(x-2)-5(y-3)=0$　$\cdots\cdots$ ③

7 と 5 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$$x-2=5k \quad \text{すなわち} \quad x=5k+2 \quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

よって　$n=7x+3=7(5k+2)+3=35k+17$

したがって，n を 35 で割ったときの余りは　17

$\boxed{9}$ (1)　3 進数 $20212_{(3)}$ を 10 進法で表すと

$$20212_{(3)}=2\cdot3^4+0\cdot3^3+2\cdot3^2+1\cdot3^1+2\cdot3^0$$
$$=185$$

185 を 5 で割り，商を 5 で割る割り算を繰り返すと，右のようになる。

$$\begin{array}{r|rl} 5 & 185 & \text{余り} \\ \hline 5 & 37 & \cdots 0 \\ \hline 5 & 7 & \cdots 2 \\ \hline 5 & 1 & \cdots 2 \\ \hline & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

出てきた余りを逆に並べて　　$1220_{(5)}$

(2)　$0.011_{(2)}=0\cdot\dfrac{1}{2^1}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3}{8}=0.375$

(3)　0.4375 に 2 を掛け，小数部分に 2 を掛けることを繰り返すと，右のようになる。

出てきた数の整数部分を順に並べて

$0.0111_{(2)}$

$$\begin{array}{rl} & \boxed{0}.4375 \\ \times & 2 \\ \hline & \boxed{0}.875 \\ \times & 2 \\ \hline & \boxed{1}.75 \\ \times & 2 \\ \hline & \boxed{1}.5 \\ \times & 2 \\ \hline & \boxed{1} \end{array}$$

$\boxed{10}$ $15=1\times15$，$15=3\times5$ から，正の約数が 15 個である自然数は

p^{14}　または　p^2q^4　　(p，q は異なる素数)

と表される。

[1]　$2^{14}>500$ であるから，p^{14} で表される 500 以下の自然数はない。

[2]　p^2q^4 で表される 500 以下の自然数は

$$2^2\cdot3^4=324,\ 3^2\cdot2^4=144,\ 5^2\cdot2^4=400$$

したがって　　3 個

$\boxed{11}$ (1)　等式を整理すると　　$(x-3)(y+2)=-5$

x，y は整数であるから，$x-3$，$y+2$ も整数である。

よって　$(x-3,\ y+2)=(1,\ -5),\ (-1,\ 5),\ (5,\ -1),\ (-5,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(4,\ -7),\ (2,\ 3),\ (8,\ -3),\ (-2,\ -1)$

(2)　等式の両辺に $2xy$ を掛けると

$2y+2x=xy$　すなわち　$xy-2x-2y=0$

整理すると　$(x-2)(y-2)=4$

x，y は正の整数であるから，$x-2$，$y-2$ は -1 以上の整数である。

よって　　$(x-2,\ y-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

$\boxed{12}$ b，c の最大公約数が 30 であるから，b，c は

$$b=30b',\ c=30c'$$

と表される。ただし，b'，c' は互いに素である自然数で，$b'<c'$ である。

このとき，b，c の最小公倍数は $30b'c'$ と表されるから

$$30b'c'=420$$

すなわち　$b'c'=14$

$b'c'=14$，$b'<c'$ を満たす互いに素である自然数 b'，c' の組は

$$(b',\ c')=(1,\ 14),\ (2,\ 7)$$

よって　$(b,\ c)=(30,\ 420),\ (60,\ 210)$

[1]　$b=30$ のとき

a，b の最小公倍数が $180=2^2\cdot3^2\cdot5$ であるから，a は素因数 2 を 2 個，素因数 3 を 2 個もつ。このとき $a<b$ を満たさない。

[2]　$b=60$ のとき

a，b の最小公倍数が 180 であり，a は 6 を約数にもつ。

よって，a は素因数 2 を少なくとも 1 個，素因数 3 を 2 個もつ。

このような a のうち，$a<b$ を満たすものは $a=2\cdot3^2=18$，$a=2^2\cdot3^2=36$ のみである。

以上より　$(a,\ b,\ c)=(18,\ 60,\ 210),\ (36,\ 60,\ 210)$

$\boxed{13}$ (1)　k は公約数であるから，a，$a-b$ は

$$a=km,\ a-b=kn\quad (m,\ n \text{ は整数})$$

と表される。

$a-b=kn$ から　$b=a-kn=km-kn=k(m-n)$

$m-n$ は整数であるから，k は b の約数である。

(2)　a と $a-b$ の最大公約数を k とする。

(1) より，k は b の約数でもあるから，k は a と b の正の公約数である。

a と b は互いに素であるから，a と b の最大公約数は 1 であり，正の公約数は 1 だけである。

よって　$k=1$

したがって，a と $a-b$ は互いに素である。

$\boxed{14}$ (1)　すべての整数は，整数 k を用いて，$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ のいずれかの形に表される。

[1]　$n=5k$ のとき

$$n^2+n+1=(5k)^2+5k+1=5(5k^2+k)+1$$

[2]　$n=5k+1$ のとき

$$n^2+n+1=(5k+1)^2+(5k+1)+1=5(5k^2+3k)+3$$

[3]　$n=5k+2$ のとき

$$n^2+n+1=(5k+2)^2+(5k+2)+1=5(5k^2+5k+1)+2$$

[4]　$n=5k+3$ のとき

$$n^2+n+1=(5k+3)^2+(5k+3)+1=5(5k^2+7k+2)+3$$

[5]　$n=5k+4$ のとき

$$n^2+n+1=(5k+4)^2+(5k+4)+1=5(5k^2+9k+4)+1$$

よって，いずれの場合も n^2+n+1 は5の倍数でない。　終

(2)　$(2n+1)=(n+2)+(n-1)$ であるから

$$n(n+1)(2n+1)=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$
$$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$$

$n(n+1)(n+2)$，$(n-1)n(n+1)$ はともに連続する3つの整数の積であるから，6の倍数である。

よって，$n(n+1)(2n+1)$ は6の倍数である。

$\boxed{15}$ Aを x 個，Bを y 個買うとすると

$$190x+290y=4500$$

この方程式を満たす負でない整数 x，y を求める。

両辺を10で割ると　$19x+29y=450$　……①

$x=-3$，$y=2$ は，$19x+29y=1$ の整数解の1つである。

よって　$19\cdot(-3)+29\cdot2=1$

両辺に450を掛けて　$19\cdot(-1350)+29\cdot900=450$　……②

①−② から　$19(x+1350)+29(y-900)=0$　……③

19と29は互いに素であるから，③より

$$x+1350=29k,\ y-900=-19k\quad(k\text{ は整数})$$

したがって，①のすべての整数解は

$$x=29k-1350,\ y=-19k+900\quad(k\text{ は整数})$$

ここで $x\geqq0$，$y\geqq0$ であるから，これを満たす k を求めると　$k=47$

このとき　$x=29\cdot47-1350=13$，$y=-19\cdot47+900=7$

よって　$x=13$，$y=7$　答　Aを13個，Bを7個

$\boxed{16}$ $24x-19y=1$　……①

$x=4$，$y=5$ は，①の整数解の1つである。

よって　$24\cdot4-19\cdot5=1$　……②

①−② から　$24(x-4)-19(y-5)=0$　……③

24と19は互いに素であるから，③より

$$x-4=19k,\ y-5=24k\quad(k\text{ は整数})$$

したがって，①のすべての整数解は

$$x=19k+4,\ y=24k+5\quad(k\text{ は整数})$$

$0\leqq x\leqq30$，$0\leqq y\leqq30$ を満たすのは $k=0$，1のときであるから，求める整数解は

$$(x,\ y)=(4,\ 5),\ (23,\ 29)$$

$\boxed{17}$ $N=ab_{(3)}$，$N=ba_{(5)}$ と表されるとき，$3a+b=5b+a$ である。

ただし，a，b は1か2である。

$3a+b=5b+a$ から　$2a=4b$　すなわち　$a=2b$

これを満たす a，b は　$a=2$，$b=1$

よって　$N=3\cdot2+1=7$