$\boxed{8}$ (1) $667=299\cdot 2+69$

$299=69\cdot 4+23$

$69=23\cdot 3+0$

よって，667 と 299 の最大公約数は　23

(2) $517=187\cdot 2+143$

$187=143\cdot 1+44$

$143=44\cdot 3+11$

$44=11\cdot 4+0$

よって，517 と 187 の最大公約数は　11

(3) $923=377\cdot 2+169$

$377=169\cdot 2+39$

$169=39\cdot 4+13$

$39=13\cdot 3+0$

よって，923 と 377 の最大公約数は　13

$\boxed{9}$ (1) 23 と 16 に互除法の計算を行う。

$23=16\cdot 1+7$　　移項すると　$7=23-16\cdot 1$

$16=7\cdot 2+2$　　移項すると　$2=16-7\cdot 2$

$7=2\cdot 3+1$　　移項すると　$1=7-2\cdot 3$

よって
$$\begin{aligned}1&=7-2\cdot 3\\&=7-(16-7\cdot 2)\cdot 3\\&=7\cdot 7+16\cdot(-3)\\&=(23-16\cdot 1)\cdot 7+16\cdot(-3)\\&=23\cdot 7+16\cdot(-10)\end{aligned}$$

すなわち　$23\cdot 7+16\cdot(-10)=1$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=7$，$y=-10$

(2) 34 と 29 に互除法の計算を行う。

$34=29\cdot 1+5$　　移項すると　$5=34-29\cdot 1$

$29=5\cdot 5+4$　　移項すると　$4=29-5\cdot 5$

$5=4\cdot 1+1$　　移項すると　$1=5-4\cdot 1$

よって
$$\begin{aligned}1&=5-4\cdot 1\\&=5-(29-5\cdot 5)\cdot 1\\&=5\cdot 6-29\cdot 1\\&=(34-29\cdot 1)\cdot 6-29\cdot 1\\&=34\cdot 6-29\cdot 7\end{aligned}$$

すなわち　$34\cdot 6-29\cdot 7=1$

両辺に 4 を掛けると

$$34\cdot 24-29\cdot 28=4$$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=24$，$y=28$

別解 (1) 23 と 16 に互除法の計算を行う。

$$23=16\cdot1+7$$
$$16=7\cdot2+2$$
$$7=2\cdot3+1$$

$a=23$，$b=16$ とおく。

$7=23-16\cdot1$ より　$7=a-b\cdot1=a-b$

$2=16-7\cdot2$ より　$2=b-(a-b)\cdot2=-2a+3b$

$1=7-2\cdot3$ より　$1=(a-b)-(-2a+3b)\cdot3=7a-10b$

よって，$7a-10b=1$ より　$23\cdot7+16\cdot(-10)=1$

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=7$，$y=-10$

(2) 34 と 29 に互除法の計算を行う。

$$34=29\cdot1+5$$
$$29=5\cdot5+4$$
$$5=4\cdot1+1$$

$a=34$，$b=29$ とおく。

$5=34-29\cdot1$ より　$5=a-b\cdot1=a-b$

$4=29-5\cdot5$ より　$4=b-(a-b)\cdot5=-5a+6b$

$1=5-4\cdot1$ より　$1=(a-b)-(-5a+6b)\cdot1=6a-7b$

よって，$6a-7b=1$ より　$34\cdot6-29\cdot7=1$

両辺に 4 を掛けると　$34\cdot24-29\cdot28=4$

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=24$，$y=28$

10 (1)　$5x-2y=1$　…… ①

$x=1$，$y=2$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot1-2\cdot2=1$　…… ②

①−② から　$5(x-1)-2(y-2)=0$　…… ③

5 と 2 は互いに素であるから，③ より

$$x-1=2k,\quad y-2=5k \quad (k\text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=2k+1,\quad y=5k+2 \quad (k\text{ は整数})$$

(2)　$36x+25y=2$　…… ①

$x=-9$，$y=13$ は，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$36\cdot(-9)+25\cdot13=1$

両辺に 2 を掛けると　$36\cdot(-18)+25\cdot26=2$　…… ②

①−② から　$36(x+18)+25(y-26)=0$　…… ③

36 と 25 は互いに素であるから，③ より

$$x+18=25k,\quad y-26=-36k \quad (k\text{ は整数})$$

したがって，① のすべての整数解は

$$x=25k-18,\quad y=-36k+26 \quad (k\text{ は整数})$$

参考 1　(2)　36 と 25 に互除法を用いると

$36=25\cdot 1+11$　　移項すると　$11=36-25\cdot 1$

$25=11\cdot 2+3$　　移項すると　$3=25-11\cdot 2$

$11=3\cdot 3+2$　　移項すると　$2=11-3\cdot 3$

$3=2\cdot 1+1$　　移項すると　$1=3-2\cdot 1$

よって　$1=3-2\cdot 1=3-(11-3\cdot 3)\cdot 1=3\cdot 4+11\cdot(-1)$

$=(25-11\cdot 2)\cdot 4+11\cdot(-1)=25\cdot 4+11\cdot(-9)$

$=25\cdot 4+(36-25\cdot 1)\cdot(-9)=36\cdot(-9)+25\cdot 13$

したがって，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-9$，$y=13$

参考 2　(2)　36 と 25 に互除法の計算を行う。

$36=25\cdot 1+11$

$25=11\cdot 2+3$

$11=3\cdot 3+2$

$3=2\cdot 1+1$

$a=36$，$b=25$ とおく。

$11=36-25\cdot 1$ より　$11=a-b\cdot 1=a-b$

$3=25-11\cdot 2$ より　$3=b-(a-b)\cdot 2=-2a+3b$

$2=11-3\cdot 3$ より　$2=(a-b)-(-2a+3b)\cdot 3=7a-10b$

$1=3-2\cdot 1$ より　$1=(-2a+3b)-(7a-10b)\cdot 1=-9a+13b$

よって，$-9a+13b=1$ より　$36\cdot(-9)+25\cdot 13=1$

したがって，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-9$，$y=13$

11　求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$n=3x+2$，$n=4y+3$

よって　$3x+2=4y+3$

すなわち　$3x-4y=1$　…… ①

$x=-1$，$y=-1$ は ① の整数解の 1 つであるから

$3\cdot(-1)-4\cdot(-1)=1$　…… ②

①−② から　$3(x+1)-4(y+1)=0$　…… ③

3 と 4 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x+1=4k$　すなわち　$x=4k-1$　(k は整数)

と表される。

したがって　$n=3x+2=3(4k-1)+2=12k-1$

$12k-1$ が 3 桁で最大の自然数となるのは，$k=83$ のときで

$n=12\cdot 83-1=995$　　答　995

$\boxed{12}$ (1)　求める整数を n とすると，(A)，(B) から，n は整数 x，y を用いて次のように表される。

$$n=3x+2,\ n=5y+3$$

よって　$3x+2=5y+3$

すなわち　$3x-5y=1$ ……①

$x=2$，$y=1$ は ① の整数解の 1 つであるから

$3\cdot2-5\cdot1=1$ ……②

①−② から　$3(x-2)-5(y-1)=0$ ……③

3 と 5 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x-2=5k$　すなわち　$x=5k+2$　(k は整数)

と表される。

したがって　$n=3x+2=3(5k+2)+2=15k+8$

$15k+8$ が正で最小となるのは，$k=0$ のときで　$n=8$

$15k+8$ が負で最大となるのは，$k=-1$ のときで　$n=-7$

(2)　求める整数を n とすると，(C) から，n は整数 z を用いて　$n=7z+4$ と表される。

また，(1) より，(A)，(B) を同時に満たす整数 n は整数 k を用いて $n=15k+8$ と表されるから

$$7z+4=15k+8$$

すなわち　$7z-15k=4$ ……④

$z=7$，$k=3$ は ④ の整数解の 1 つであるから

$7\cdot7-15\cdot3=4$ ……⑤

④−⑤ から　$7(z-7)-15(k-3)=0$ ……⑥

7 と 15 は互いに素であるから，⑥ を満たす整数 z は

$z-7=15l$　すなわち　$z=15l+7$　(l は整数)

と表される。

これを $n=7z+4$ に代入すると

$$n=7(15l+7)+4=105l+53$$

$105l+53$ が正で最小となるのは，$l=0$ のときで　$n=53$

$105l+53$ が負で最大となるのは，$l=-1$ のときで　$n=-52$

答　(ア)　8　(イ)　7　(ウ)　5　(エ)　3　(オ)　5　(カ)　2