数学Ⅱ　P60解説

$\boxed{1}$ (1) $(1+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-8})=(1+\sqrt{2}\,i)(3-2\sqrt{2}\,i)$

$$=3-2\sqrt{2}\,i+3\sqrt{2}\,i-4i^2$$

$$=\{3-4\cdot(-1)\}+(-2\sqrt{2}+3\sqrt{2})i$$

$$=7+\sqrt{2}\,i$$

(2) $(1-i)^3=1^3-3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2-i^3$

$$=\{1+3\cdot(-1)\}+(-3+1)i$$

$$=-2-2i$$

(3) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-2i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}+\dfrac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$

$$=\frac{1-i}{1^2+1^2}+\frac{1+2i}{1^2+2^2}$$

$$=\frac{1-i}{2}+\frac{1+2i}{5}$$

$$=\frac{5(1-i)+2(1+2i)}{10}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i$$

$\boxed{2}$ (1)　左辺を因数分解すると

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$$

よって　　$2x-1=0$　または　$4x^2+2x+1=0$

したがって　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$

(2)　左辺を因数分解すると

$$(2x^2-3)(x^2+2)=0$$

よって　　$2x^2-3=0$　または　$x^2+2=0$

したがって　　$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \pm\sqrt{2}\,i$

(3)　展開して整理すると

$$x^3+3x^2+2x-24=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x^2+5x+12)=0$$

よって　　$x-2=0$　または　$x^2+5x+12=0$

したがって　　$x=2,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

(4)　$x^2-x=A$ とおくと　　$A^2-8A+12=0$

左辺を因数分解すると　　$(A-2)(A-6)=0$

よって　　$(x^2-x-2)(x^2-x-6)=0$

$$(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)=0$$

したがって　　$x=-2,\ -1,\ 2,\ 3$

$\boxed{3}$ $2+i$ が解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+5=0$$

整理して　$(3a+2b+7)+(4a+b+11)i=0$

a，b は実数であるから，$3a+2b+7$，$4a+b+11$ は実数である。

よって　$3a+2b+7=0$，$4a+b+11=0$

これを解くと　$a=-3$，$b=1$

よって，3 次方程式は　$x^3-3x^2+x+5=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

これを解くと　$x=-1$，$2\pm i$

したがって，他の解は　-1，$2-i$

$\boxed{\text{別解}}$　実数係数の方程式であるから，$2+i$ を解にもてば $2-i$ も解にもつ。

$2+i$，$2-i$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-4x+5=0$$

x^3+ax^2+bx+5 を x^2-4x+5 で割った余りを計算すると

$$(4a+b+11)x-5a-15$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+4) \\
\hline
x^2-4x+5 & x^3 \;+ax^2 \qquad +bx \quad +5 \\
 & x^3 \;-4x^2 \qquad +5x \\
\hline
 & (a+4)x^2+(b-5)x \;\; +5 \\
 & (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \\
\hline
 & (4a+b+11)x-5a-15
\end{array}$$

$4a+b+11=0$，$-5a-15=0$ より

$$a=-3,\ b=1$$

よって，3 次方程式は　$x^3-3x^2+x+5=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

これを解くと　$x=-1$，$2\pm i$

したがって，他の解は　-1，$2-i$

$\boxed{4}$ $z=a+bi$ とおく。

$(a+bi)^2=5+12i$ より　$(a^2-b^2)+2abi=5+12i$

a，b は実数であるから，a^2-b^2，$2ab$ は実数である。

よって　$a^2-b^2=5$，$2ab=12$

すなわち　$a^2-b^2=5$　…… ①，　$ab=6$　…… ②

① より　$b^2=a^2-5$　…… ③

② より　$a^2b^2=36$　…… ④

③，④ より　$a^2(a^2-5)=36$

すなわち　$a^4-5a^2-36=0$

$$(a^2-9)(a^2+4)=0$$

a は実数であるから　$a^2+4\neq 0$

よって　$a^2-9=0$　すなわち　$a=\pm 3$

② より　$a=3$ のとき　$b=2$

　　　　$a=-3$ のとき　$b=-2$

したがって　$z=3+2i$，$-3-2i$

$\boxed{5}$ 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ について，解と係数の関係により

2つの解の　　和は $-a$，積は b

また，$-a$，b を2つの解にもつ2次方程式の1つが $x^2+bx+2a=0$ であるから

$-a+b=-b$ ……①，　$-ab=2a$ ……②

② において，$a \fallingdotseq 0$ より　$b=-2$

① より　$a=2b=2\cdot(-2)=-4$

よって　$a=-4$，$b=-2$

$\boxed{6}$ この2次方程式の2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

この2次方程式が，異なる2つの解をもち，その解がともに1より大きいのは，次が成り立つときである。

$D>0$ で，$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-1\cdot(m+5)=m^2-3m-4=(m+1)(m-4)$

$D>0$ より　$(m+1)(m-4)>0$

よって　$m<-1$，$4<m$ ……①

また，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2(m-1)$，$\alpha\beta=m+5$

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ より　$(\alpha+\beta)-2>0$

よって　$2(m-1)-2>0$　これを解くと　$m>2$ ……②

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ より　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

よって　$m+5-2(m-1)+1>0$　これを解くと　$m<8$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$4<m<8$

$\boxed{7}$ (1)　$x=-1+\sqrt{2}i$ から　$x+1=\sqrt{2}i$

両辺を2乗すると　$(x+1)^2=-2$

よって　$x^2+2x+3=0$

(2)　x^3+6x^2+8x+7 を x^2+2x+3 で割ると，商 $x+4$，余り $-3x-5$ であるから

x^3+6x^2+8x+7

$=(x^2+2x+3)(x+4)-3x-5$

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x^2+2x+3 & x^3+6x^2+8x+7 \\ & x^3+2x^2+3x \\ \hline & \quad 4x^2+5x+7 \\ & \quad 4x^2+8x+12 \\ \hline & \qquad -3x-5 \end{array}$$

(1) より，$x^2+2x+3=0$ であるから，

$x=-1+\sqrt{2}i$ のときの x^3+6x^2+8x+7 の値は

$-3\cdot(-1+\sqrt{2}i)-5=-2-3\sqrt{2}i$

$\boxed{8}$ $x=1$ がこの方程式の解であるから

$$1^3+(a-1)\cdot 1^2+(1-a)\cdot 1+b=0$$

これを解いて　　$b=-1$

$b=-1$ を方程式に代入すると

$$x^3+(a-1)x^2+(1-a)x-1=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+ax+1)=0$$

この方程式の実数解が $x=1$ だけであるのは，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ が実数解をもたない場合

判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot 1\cdot 1=a^2-4$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときである。

よって　　$a^2-4<0$

これを解いて　　$-2<a<2$

[2]　2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ が $x=1$ を重解にもつ場合

$x=1$ が 2 次方程式の解であるから　　$1^2+a\cdot 1+1=0$

これを解くと　　$a=-2$

このとき，2 次方程式は $x^2-2x+1=0$ となり，重解 $x=1$ をもつ。

[1]，[2] より，求める a の値の範囲は

$$-2\leqq a<2$$