数学Ⅱ　P59解説

$\boxed{7}$ $P(x)=3x^3+x^2+x+1$ を $3x+1$ で割った余りは $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ に等しい。

よって，求める余りは

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)+1=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

$\boxed{8}$ (1)　$P(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)+b=-a+b-1$

$P(3)=3^3+a\cdot 3+b=3a+b+27$

(2)　$P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割った余りが $3x-2$ であるから，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+3x-2$$

この等式より

$$P(-1)=3\cdot(-1)-2=-5$$
$$P(3)=3\cdot 3-2=7$$

よって，(1)より　$-a+b-1=-5$，$3a+b+27=7$

これを解いて　$a=-4$，$b=-8$

$\boxed{9}$ (1)　ω は 1 の 3 乗根であるから　$\omega^3=1$

よって　$\omega^6=(\omega^3)^2=1^2=1$

(2)　$x^3=1$ より　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$\omega^2+\omega+1=0$$

また，$\omega^3=1$ であるから

$$\omega^4+\omega^2+1=\omega\cdot\omega^3+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$$

$\boxed{10}$ (1)　左辺を因数分解すると

$$(x^2-4)(x^2+6)=0$$

よって　$x^2-4=0$ または $x^2+6=0$

したがって　$x=\pm 2$，$\pm\sqrt{6}\,i$

(2)　$P(x)=2x^3+7x^2+2x-3$ とすると

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3+7\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-3$$
$$=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x)=(x+1)(2x^2+5x-3)$$
$$=(x+1)(x+3)(2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$$x=-3,\ -1,\ \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x^2+5x-3 \\
x+1 \big) & 2x^3+7x^2+2x-3 \\
 & 2x^3+2x^2 \\ \hline
 & 5x^2+2x \\
 & 5x^2+5x \\ \hline
 & -3x-3 \\
 & -3x-3 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(3)　$P(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$ とすると

$$P(1)=1^4-1^3-2\cdot1^2+1+1$$
$$=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x)=(x-1)(x^3-2x-1)$$

$Q(x)=x^3-2x-1$ とすると

$$Q(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)-1$$
$$=0$$

よって，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$Q(x)=(x+1)(x^2-x-1)$$

したがって

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-1)$$

$P(x)=0$ から

$x-1=0$ または $x+1=0$ または $x^2-x-1=0$

よって

$$x=\pm1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{array}{r}
x^3-2x-1 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^4-x^3-2x^2+x+1} \\
\underline{x^4-x^3\phantom{-2x^2+x+1}} \\
-2x^2+x \\
\underline{-2x^2+2x} \\
-x+1 \\
\underline{-x+1} \\
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x^2-x-1 \\
x+1\,\big)\,\overline{x^3-2x-1} \\
\underline{x^3+x^2} \\
-x^2-2x \\
\underline{-x^2-x} \\
-x-1 \\
\underline{-x-1} \\
0
\end{array}$$

$\boxed{11}$ (1)　1，-1 がこの方程式の解であるから

$$1^3-2\cdot1^2+a\cdot1+b=0,\ (-1)^3-2\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+b=0$$

式を整理すると

$$a+b-1=0,\ -a+b-3=0$$

これを解いて　　$a=-1$，$b=2$

(2)　(1) より，方程式は

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

この式の左辺は $(x-1)(x+1)$ で割り切れるから，左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x+1)(x-2)=0$$

したがって，求める他の解は　2

$\boxed{12}$ $P(x)=x^3+x^2-(a+5)x+a+3$ について

$$P(1)=1^3+1^2-(a+5)\cdot1+a+3=0$$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

よって，$P(x)$ を因数分解して整理すると

$$P(x)=(x-1)\{x^2+2x-(a+3)\}$$

答　(ア)　1　　(イ)　2　　(ウ)　3

$$\begin{array}{r}
x^2+2x-(a+3) \\
x-1\,\big)\,\overline{x^3+x^2-(a+5)x+a+3} \\
\underline{x^3-x^2} \\
2x^2-(a+5)x \\
\underline{2x^2-2x} \\
-(a+3)x+a+3 \\
\underline{-(a+3)x+a+3} \\
0
\end{array}$$