

数学Ⅱ P50解説

1 (1) x, y が実数であるから, $x-3y, 2x+y$ は実数である。

よって $x-3y=1, 2x+y=-12$

これを解いて $x=-5, y=-2$

(2) 等式の左辺を変形すると

$$(5x-y)+(x+5y)i=13+13i$$

x, y が実数であるから, $5x-y, x+5y$ は実数である。

よって $5x-y=13, x+5y=13$

これを解いて $x=3, y=2$

別解 (2) $x+yi = \frac{13+13i}{5+i} = \frac{13(1+i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{13(5-i+5i-i^2)}{5^2+1^2}$
 $= \frac{13(6+4i)}{26} = 3+2i$

よって $x=3, y=2$

2 (1) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{(-1)^2-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2}{2^2} = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}$
 $= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(2) $i + \frac{1}{i} = i + \frac{i}{i^2} = i - i = 0$

(3) $i+i^2+i^3+i^4 = i+i^2+i\cdot i^2+(i^2)^2 = i-1-i+1=0$

3 (1) $x = \frac{-(-\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}i}{4}$

(2) 展開して整理すると

$$2x^2+1=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

よって $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

別解 (2) $x+1=A$ とおくと $2A^2-4A+3=0$

よって $A = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

したがって $x = A - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

4 解と係数の関係により $\alpha + \beta = -\frac{4}{2} = -2, \alpha\beta = \frac{3}{2}$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$

(2) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

5 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = -1$

(1) $(\alpha - 2) + (\beta - 2) = (\alpha + \beta) - 4 = 7 - 4 = 3$

$(\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 = -1 - 2 \cdot 7 + 4 = -11$

よって、 $\alpha - 2, \beta - 2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

(2) $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta + 2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \cdot 7}{-1} = -14$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = -4$$

よって、 $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 + 14x - 4 = 0$$

(3) $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 7 + (-1) = 6$

$(\alpha + \beta) \cdot \alpha\beta = 7 \cdot (-1) = -7$

よって、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

6 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - m) = m^2 + 4m - 8$$

2 次方程式が虚数解をもつのは $D < 0$ のときであるから

$$-2 - 2\sqrt{3} < m < -2 + 2\sqrt{3}$$

2 次方程式 ① の解は $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4m - 8}}{2}$

虚数解の実部は $-\frac{m}{2}$ であるから

$$-\frac{m}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad m = -2$$

このとき、虚数解は $x = 1 \pm \frac{\sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

答 (ア) 2 (イ) 2 (ウ) 3 (エ) 2 (オ) 3