数学Ⅱ　P33P34解説

$\boxed{1}$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{5-2^2}=\sqrt{5}-2$

(1) $x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}+2)=2\sqrt{5}$

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{5})^2-2=18$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(2\sqrt{5})^3-3\cdot2\sqrt{5}=40\sqrt{5}-6\sqrt{5}=34\sqrt{5}$

別解 (3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=2\sqrt{5}(18-1)=34\sqrt{5}$

$\boxed{2}$ (1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+x^2+x+1 \\
\hline
x-1 & x^4\qquad\qquad\qquad -1 \\
 & x^4-x^3 \\
\hline
 & x^3 \\
 & x^3-x^2 \\
\hline
 & x^2 \\
 & x^2-x \\
\hline
 & x-1 \\
 & x-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

商 x^3+x^2+x+1，余り 0

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-\dfrac{1}{2} \\
\hline
2x^2+4x-3 & 4x^3+7x^2-9x+3 \\
 & 4x^3+8x^2-6x \\
\hline
 & -x^2-3x+3 \\
 & -x^2-2x+\dfrac{3}{2} \\
\hline
 & -x+\dfrac{3}{2}
\end{array}
$$

商 $2x-\dfrac{1}{2}$，余り $-x+\dfrac{3}{2}$

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x(x+3)}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x}{x-1}$

(2) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4a}\div\dfrac{a^2+2a}{a-4}=\dfrac{(a+2)^2}{a(a-4)}\times\dfrac{a-4}{a(a+2)}=\dfrac{a+2}{a^2}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

(4) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}=\dfrac{z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)}{xyz}$

$$=\frac{xz-yz+xy-xz+yz-xy}{xyz}$$

$$=0$$

$\boxed{4}$ (1) 等式の右辺を x について整理すると

$$x^3=x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+(a-b+c-1)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0=a-3,\ 0=-2a+b+3,\ 0=a-b+c-1$$

これを解いて　$a=3$，$b=3$，$c=1$

(2) 等式の両辺に x^3+1 を掛けて得られる等式

$$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$$

が恒等式であればよい。右辺を x について整理すると

$$3=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0=a+b,\ 0=-a+b+c,\ 3=a+c$$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$，$c=2$

$\boxed{5}$ (1) [1] $|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$$

$$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$$

$$=2(|ab|-ab)\geqq 0$$

よって　　$|a-b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a-b|\geqq 0$，$|a|-|b|\geqq 0$ であるから

$$|a|-|b|\leqq|a-b|$$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき，$|a-b|\geqq 0$ であるから　$|a|-|b|<|a-b|$

[1]，[2] から　　$|a|-|b|\leqq|a-b|$

(2) [1] $|a|-|b| \geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned} |a+b|^2-(|a|-|b|)^2 &= (a+b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2) \\ &= (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2) \\ &= 2(|ab|+ab) \geqq 0 \end{aligned}$$

よって $|a+b|^2 \geqq (|a|-|b|)^2$

$|a|-|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから

$$|a|-|b| \leqq |a+b|$$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき，$|a+b| \geqq 0$ であるから $|a|-|b|<|a+b|$

[1]，[2] から $|a|-|b| \leqq |a+b|$

別解 (1) $|a+b| \leqq |a|+|b|$ において，a を $a-b$ でおき換えると

$$|(a-b)+b| \leqq |a-b|+|b|$$

すなわち $|a| \leqq |a-b|+|b|$

よって $|a|-|b| \leqq |a-b|$

(2) $|a|-|b| \leqq |a-b|$ において，b を $-b$ でおき換えると

$$|a|-|-b| \leqq |a-(-b)|$$

よって $|a|-|b| \leqq |a+b|$

$\boxed{6}$ (1) 左辺 $=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$$\begin{aligned} &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \\ &= 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(2) (1) より

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

よって

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

したがって $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

$\boxed{7}$ (1) $ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{16}{ab} \geqq 2\sqrt{ab \cdot \frac{16}{ab}}=8$$

よって $ab+\dfrac{16}{ab} \geqq 8$

(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}$

$$=ab+\frac{4}{ab}+5$$

ここで，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}+5 \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

よって　　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

$\boxed{8}$ (1)　　$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=(8x^3-y^3)-(12x^2y-6xy^2)$

$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)-6xy(2x-y)$

$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2-6xy)$

$=(2x-y)(4x^2-4xy+y^2)=(2x-y)(2x-y)^2=(2x-y)^3$

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy\{(x+y)+z\}$

$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy\}$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

別解　(1)　$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$=(2x-y)^3$

$\boxed{9}$ $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}+\dfrac{2}{1+x^2}$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}$$

$\boxed{10}$ 整式 A を 2 次式 x^2+x-2 で割った商を $cx+d$ とおくと

$$ax^3+bx^2+2x+1=(x^2+x-2)(cx+d)+2x+5$$

右辺を x について整理すると

$$ax^3+bx^2+2x+1=cx^3+(c+d)x^2+(-2c+d+2)x+(-2d+5)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$a=c,\ b=c+d,\ 2=-2c+d+2,\ 1=-2d+5$$

これを解くと　　$a=1$，$b=3$，$c=1$，$d=2$

したがって　　$a=1$，$b=3$，商 $x+2$

$\boxed{11}$ 与えられた等式は k についての恒等式であり，これを k について整理すると

$$(x+y-3)k+(2x+y-4)=0$$

よって　　$x+y-3=0$，$2x+y-4=0$

これを解いて　　$x=1$，$y=2$

$\boxed{12}$ $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k$ とおくと　　$x=k,\ y=2k,\ z=3k$

$x+y+z=24$ に代入して　　$k+2k+3k=24$

これを解くと　　$k=4$

よって　　$x=4,\ y=8,\ z=12$

$\boxed{13}$ $(1+x)^n$ を，二項定理を用いて展開すると

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

ここで，$x>0$ で，n は 2 以上の自然数であるから

$$(1+x)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x=1+nx$$

$\boxed{14}$ $a+b=1$ であるから　　$b=1-a$

$a>b>0$ より　　$a>1-a>0$　すなわち　$\dfrac{1}{2}<a<1$

$$a^2+b^2-\frac{1}{2}=a^2+(1-a)^2-\frac{1}{2}=2a^2-2a+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0$$

$$\frac{1}{2}-2ab=\frac{1}{2}-2a(1-a)=2a^2-2a+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0$$

以上より　$a^2+b^2>\dfrac{1}{2}>2ab$

よって，3 つの数を大きい順に並べると

$$a^2+b^2,\ \frac{1}{2},\ 2ab$$