$\boxed{9}$ (1)　右辺$=\left(x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}=$左辺

よって　　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

(2)　右辺$=\left(x^3+3x^2\cdot\dfrac{1}{x}+3x\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)-3x-\dfrac{3}{x}=x^3+\dfrac{1}{x^3}=$左辺

よって　　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$\boxed{10}$ $a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+\{-(a+b)\}^2+2\{ab-b(a+b)-(a+b)a\}\\&=2a^2+2b^2+2ab+2(-a^2-b^2-ab)\\&=0\end{aligned}$$

よって　　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\boxed{11}$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

よって　　$\dfrac{ma+nc}{mb+nd}=\dfrac{mbk+ndk}{mb+nd}=\dfrac{k(mb+nd)}{mb+nd}=k$

$\dfrac{a}{b}=k$ であるから　　$\dfrac{ma+nc}{mb+nd}=\dfrac{a}{b}$

$\boxed{12}$

$$\begin{aligned}(ax+by)-(bx+ay)&=ax+by-bx-ay\\&=a(x-y)-b(x-y)\\&=(a-b)(x-y)\end{aligned}$$

$a<b$，$x<y$ であるから

$a-b<0$，$x-y<0$

よって

$(a-b)(x-y)>0$　すなわち　$(ax+by)-(bx+ay)>0$

したがって　　$ax+by>bx+ay$

$\boxed{13}$ 両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2&=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)\\&=a-2\sqrt{ab}+b\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\boxed{14}$　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$

ここで，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

$\boxed{15}$ (前半)

$x>0$ のとき $\dfrac{9}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot 3=6$$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\dfrac{9}{x}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ の最小値は 6 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

(後半)

$x>2$ のとき，$x-2>0$，$\dfrac{1}{x-2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2$$
$$\geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$$

等号が成り立つのは，$x>2$ かつ $x-2=\dfrac{1}{x-2}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>2$ のとき，$x+\dfrac{1}{x-2}$ の最小値は 4 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

答　(ア)　6　　(イ)　3　　(ウ)　4　　(エ)　3