

1 (1) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3$
 $= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^2$
 $= (a^3+b^3)^2$
 $= a^6 + 2a^3b^3 + b^6$

2 (1) $8a^3+b^3 = (2a)^3+b^3 = (2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

(2) $(x+y)^3-1 = (x+y)^3-1^3 = \{(x+y)-1\}\{(x+y)^2+(x+y)+1\}$
 $= (x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$

(3) $a^6-7a^3-8 = (a^3+1)(a^3-8)$
 $= (a+1)(a^2-a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$
 $= (a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)$

3 (1) $(3x^2+2)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(3x^2)^{6-r} \cdot 2^r = {}_6C_r 3^{6-r} \cdot 2^r \cdot x^{2(6-r)}$$

$2(6-r)=2$ とすると $r=5$

よって、求める係数は ${}_6C_5 \times 3 \times 2^5 = 6 \times 3 \times 32 = 576$

(2) $(x-2y+3z)^5$ の展開式において、 z^2 を含む項は ${}_5C_2(x-2y)^3(3z)^2$

$(x-2y)^3$ の展開式において、 xy^2 の項は ${}_3C_2 x \cdot (-2y)^2$

よって、求める係数は ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times 3^2 \times (-2)^2 = 10 \times 3 \times 9 \times 4 = 1080$

4 (1) この割り算について、次の等式が成り立つ。

$$A = (x+2)(x^2-x-3) + 5$$

よって

$$A = x^3 + x^2 - 5x - 1$$

(2) この割り算について、次の等式が成り立つ。

$$2x^3 + 5x^2 - 6x + 3 = B \times (2x-1) + x + 1$$

整理すると

$$2x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = B \times (2x-1)$$

よって、 $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ は $2x-1$ で割り切れて、その商が B である。

右の計算により $B = x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ 2x-1 \overline{) 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2} \\ \underline{2x^3 - x^2} \\ 6x^2 - 7x \\ \underline{6x^2 - 3x} \\ -4x + 2 \\ \underline{-4x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{5} \quad & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{(x+2)(x+3) + x(x+3) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{3x^2 + 9x + 6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{3(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{別解}} \quad & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
&= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3) - x}{x(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad A = \frac{x^3 - 1}{x}, \quad B = \frac{x^2 + x + 1}{x} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{x^3 - 1}{x} \div \frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x} \times \frac{x}{x^2 + x + 1} \\
&= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{別解}} \quad \frac{A}{B} &= \frac{\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} \\
&= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x - 1
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (1) 等式の左辺を x について整理すると

$$(a + 2b + 2)x + (a - b + 5) = 0$$

係数について

$$a + 2b + 2 = 0, \quad a - b + 5 = 0$$

これを解いて $a = -4, \quad b = 1$

(2) 等式の右辺を x について整理すると

$$x^3 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (2a - b + c)x + d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$1 = a, \quad 0 = -3a + b, \quad 0 = 2a - b + c, \quad 0 = d$$

これを解いて $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 0$

$\boxed{\text{別解}}$ (2) 等式の両辺の x に 0, 1, 2, 3 をそれぞれ代入すると

$$0 = d, \quad 1 = c + d, \quad 8 = 2b + 2c + d, \quad 27 = 6a + 6b + 3c + d$$

これを解くと $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 0$

逆に、これらの値を右辺に代入し整理すると左辺と一致し、与えられた等式は x についての恒等式である。

よって $a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 0$

8 $6x^4 + x^3 - ax^2 + 2x + 1$ を $2x^2 + x + 1$ で割った商を $bx^2 - x - 3$, 余りを $cx + d$ とおくと

$$6x^4 + x^3 - ax^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)(bx^2 - x - 3) + cx + d$$

等式の右辺を x について整理すると

$$6x^4 + x^3 - ax^2 + 2x + 1 = 2bx^4 + (b-2)x^3 - (7-b)x^2 + (c-4)x + (d-3)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$6 = 2b, \quad 1 = b - 2, \quad a = 7 - b, \quad 2 = c - 4, \quad 1 = d - 3$$

これを解いて $a = 4, b = 3, c = 6, d = 4$

答 (ア) 4 (イ) 3 (ウ) 6 (エ) 4

別解 整式 $6x^4 + x^3 - ax^2 + 2x + 1$ を $2x^2 + x + 1$ で割って、商が与えられた式の形になる割り算の計算は、次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \overline{3x^2 - x - 3} \\
 2x^2 + x + 1 \overline{) 6x^4 + x^3 - ax^2 + 2x + 1} \\
 \underline{6x^4 + 3x^3 + 3x^2} \\
 -2x^3 - (a+3)x^2 + 2x \\
 \underline{-2x^3 - x^2 - x} \\
 -(a+2)x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-6x^2 - 3x - 3} \\
 -(a-4)x^2 + 6x + 4
 \end{array}$$

余りは1次式であるから、 x^2 の係数は0である。

よって、 $a - 4 = 0$ から $a = 4$

答 (ア) 4 (イ) 3 (ウ) 6 (エ) 4