数学Ⅰ　P158　P159解説

$\boxed{1}$ (1)　$\mathrm{BH}=x$ (m) とすると

$$\mathrm{PH}=x\tan 60^\circ=\sqrt{3}\,x,\qquad \mathrm{PH}=(x+10)\tan 45^\circ=x+10$$

であるから　$\sqrt{3}\,x=x+10$

よって　$(\sqrt{3}-1)x=10$

$$x=\frac{10}{\sqrt{3}-1}=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$$　答　$5(\sqrt{3}+1)$ m

(2)　$\mathrm{PH}=x+10=5(\sqrt{3}+1)+10=5(\sqrt{3}+3)$　答　$5(\sqrt{3}+3)$ m

$\boxed{2}$ (1)　辺ABは円の直径であるから　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

直角三角形ABCにおいて　$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\sin 60^\circ=10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

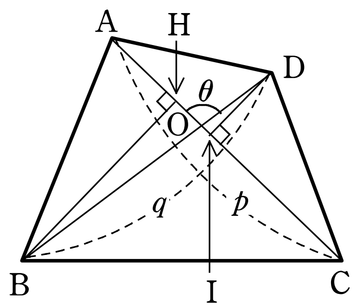
(2)　$\angle\mathrm{CAB}=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$

よって　$\angle\mathrm{DAC}=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

$\triangle\mathrm{ACD}$ に正弦定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin 45^\circ}=2\times 5$

したがって　$\mathrm{CD}=10\sin 45^\circ=10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

$\boxed{3}$ 点B，Dから直線ACにそれぞれ垂線を下ろし，ACとの交点をそれぞれH，Iとおく。



$$\mathrm{BH}=\mathrm{OB}\sin(180^\circ-\theta)=\mathrm{OB}\sin\theta$$

$$\mathrm{DI}=\mathrm{OD}\sin(180^\circ-\theta)=\mathrm{OD}\sin\theta$$

であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$$

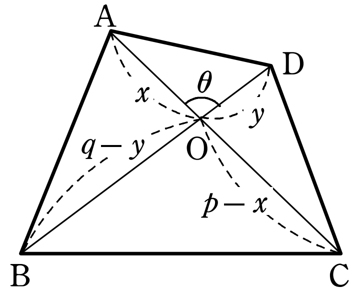
$$\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DI}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OD}\sin\theta$$

よって

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

別解　AO$=x$，DO$=y$ とおくと，BO$=q-y$，CO$=p-x$ となる。



よって　　$\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}x(q-y)\sin(180°-\theta)$

$=\dfrac{1}{2}x(q-y)\sin\theta$

$\triangle \mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}(q-y)(p-x)\sin\theta$

$\triangle \mathrm{OCD}=\dfrac{1}{2}(p-x)y\sin(180°-\theta)=\dfrac{1}{2}(p-x)y\sin\theta$

$\triangle \mathrm{ODA}=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$

したがって

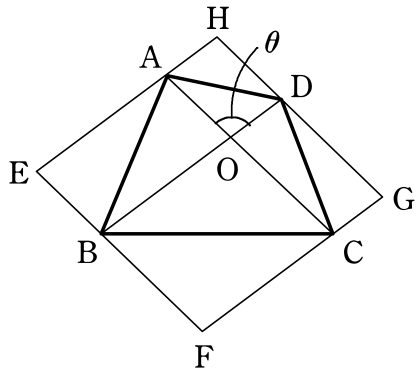
$$S=\triangle \mathrm{OAB}+\triangle \mathrm{OBC}+\triangle \mathrm{OCD}+\triangle \mathrm{ODA}$$
$$=\frac{1}{2}\{x(q-y)+(q-y)(p-x)+(p-x)y+xy\}\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

別解　右の図のように，各頂点を通り，対角線に平行な直線を引き，平行四辺形EFGHを作ると

$\angle \mathrm{EFG}=\angle \mathrm{GHE}=\theta$

四角形ABCDの面積 S は，平行四辺形EFGHの面積 $pq\sin\theta$ の半分であるから

$S=\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$



4　(1)　頂点Cから辺ABに垂線CDを下ろすと

$\angle \mathrm{ACD}=180°-(45°+90°)=45°$

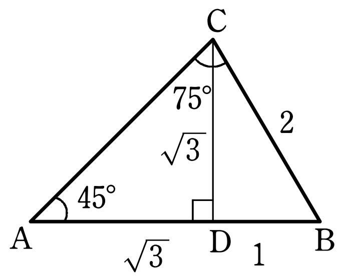
$\angle \mathrm{BCD}=75°-\angle \mathrm{ACD}=75°-45°=30°$

よって　　$\mathrm{DB}=2\sin30°=1$

$\mathrm{DC}=2\cos30°=\sqrt{3}$

$\mathrm{AD}=\mathrm{DC}=\sqrt{3}$

したがって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\sqrt{3}+1$



(2)　△ABCに正弦定理を使うと

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin75°}=\frac{2}{\sin45°}$$

よって　　$\sin75°=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$ であるから，△ABCに余弦定理を使うと

$$\cos75°=\frac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{6}}=\frac{6-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{5}$ △ABCにおいて，正弦定理により　$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$

よって　$\sin B=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす B は　$B=60^\circ$，120°

$B=60^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

△ABCは $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$$a=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$$

$B=120^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

△ABCは $A=C$ の二等辺三角形であるから　$a=c=2$

答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$　または　$a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

別解　△ABCにおいて，余弦定理により

$$2^2=a^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

式を整理すると　$a^2-6a+8=0$

これを解くと　$a=2$，4

$a=4$ のとき　$\cos A=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+2^2-4^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2}=0$

$$A=90^\circ,\ B=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$$

$a=2$ のとき　△ABCは $a=c$ の二等辺三角形であるから

$$A=C=30^\circ,\ B=180^\circ-2\cdot 30^\circ=120^\circ$$

答　$a=4$，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$　または　$a=2$，$A=30^\circ$，$B=120^\circ$

$\boxed{6}$ $\angle B=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}AC^2&=BA^2+BC^2-2\cdot BA\cdot BC\cos\theta\\&=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cos\theta\\&=41-40\cos\theta\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}AC^2&=DA^2+DC^2-2\cdot DA\cdot DC\cos(180^\circ-\theta)\\&=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4(-\cos\theta)\\&=20+16\cos\theta\end{aligned}$$

$41-40\cos\theta=20+16\cos\theta$ より　$\cos\theta=\dfrac{21}{56}=\dfrac{3}{8}$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

よって，四角形ABCDの面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BA\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\sin(180^\circ-\theta)\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{55}}{8}=\frac{7\sqrt{55}}{4}\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (1)

$$PQ^2=PB^2+BQ^2=4^2+2^2=20$$
$$PF^2=PB^2+BF^2=4^2+6^2=52$$
$$FQ^2=BQ^2+BF^2=2^2+6^2=40$$

よって，△PFQ に余弦定理を使うと

$$\cos\angle PQF=\frac{PQ^2+FQ^2-PF^2}{2\cdot PQ\cdot FQ}$$
$$=\frac{20+40-52}{2\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}}=\frac{8}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$\sin\angle PQF>0$ であるから

$$\sin\angle PQF=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

△PFQ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot FQ\sin\angle PQF$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=14$$

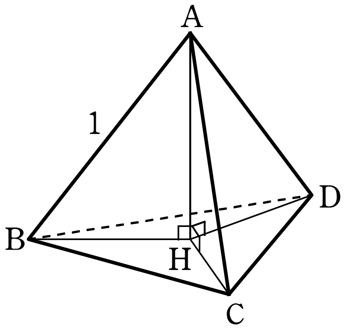
(2) △BPF を底面とし，BQ を高さとする三角錐と，△PFQ を底面とし，BK を高さとする三角錐は同じ立体であるから，体積は等しい。

よって　$\frac{1}{3}\cdot\triangle BPF\cdot BQ=\frac{1}{3}\cdot\triangle PFQ\cdot BK$

すなわち　$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 14\cdot BK$

したがって　$BK=\frac{12}{7}$

$\boxed{8}$ (1) 頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす。



△ABH，△ACH，△ADH はいずれも直角三角形で

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}, \quad \mathrm{AH} \text{ は共通}$$

であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって　　BH＝CH＝DH

であるから，H は △BCD の外接円の中心であり，BH は △BCD の外接円の半径である。

正弦定理により　　$\dfrac{1}{\sin 60^\circ}=2\,\mathrm{BH}$　すなわち　$\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　　$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

△BCD の面積 S は　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって　　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{AH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

(2) $V=4V'$ であるから　　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}=4V'$

よって　　$V'=\dfrac{\sqrt{2}}{48}$

(3) $\triangle\mathrm{BCD}\times r=3V'$ であるから　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot r=3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{48}$

よって　　$r=3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{48}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$