数学Ｉ　P118解説

$\boxed{1}$ 放物線 $y=-2x^2+3x+1$ を平行移動した放物線の方程式は $y=-2x^2+bx+c$ の形で表される。

点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 12)$ を通るから

$$0=-2\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c,\qquad 12=-2\cdot1^2+b\cdot1+c$$

よって　　$-2b+c=8,\quad b+c=14$

これを解くと　　$b=2,\ c=12$

よって，求める放物線の方程式は　　　$y=-2x^2+2x+12$

$\boxed{2}$ $2x^2+4x=2(x+1)^2-2$ より，放物線 $y=2x^2+4x$ の頂点の座標は　$(-1,\ -2)$

$x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ より，放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$$

よって　　$-\dfrac{a}{2}=-1,\ -\dfrac{a^2}{4}+b=-2$

これを解いて　　$a=2,\ b=-1$

$\boxed{\text{別解}}$　$y=2x^2+4x$ を変形すると　　$y=2(x+1)^2-2$

x^2 の係数が 1 で頂点の座標が $(-1,\ -2)$ である放物線の方程式は

$y=(x+1)^2-2$　すなわち　$y=x^2+2x-1$

よって，係数を比較して　　$a=2,\ b=-1$

$\boxed{3}$ (1)　$x^2-mx+m=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+m$

よって，2 次関数 $y=x^2-mx+m$ は，$x=\dfrac{m}{2}$ で最小値 $-\dfrac{m^2}{4}+m$ をとる。

したがって　　$k=-\dfrac{m^2}{4}+m$

(2)　$-\dfrac{m^2}{4}+m=-\dfrac{1}{4}(m-2)^2+1$

よって，$k=-\dfrac{m^2}{4}+m$ は，$m=2$ で最大値 1 をとる。

$\boxed{4}$ (1)　放物線が上に凸であるから　$a<0$

よって，符号は　負

(2)　放物線と y 軸の交点の y 座標が正であるから　$c>0$

よって，符号は　正

(3)　放物線の軸は直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$

よって，符号は　正

(4)　$a<0$ かつ $-\dfrac{b}{2a}>0$ より　$b>0$　　　よって，符号は　正

(5)　放物線と x 軸は異なる 2 点を共有しているから　$b^2-4ac>0$

よって，符号は　正

(6)　グラフ上の点で，x 座標が 1 である点の y 座標が $a+b+c$ である。

この点は x 軸の上側にあるから　$a+b+c>0$

よって，符号は　正

$\boxed{5}$ 2 次不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-1<x<2$ であるのは，2 次関数 $y=ax^2+bx+4$ のグラフが上に凸で，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるときである。

$y=ax^2+bx+4$ において

$x=-1$ とすると　$y=a-b+4$

$x=2$ とすると　$y=4a+2b+4$

よって

$a<0$　…… ①

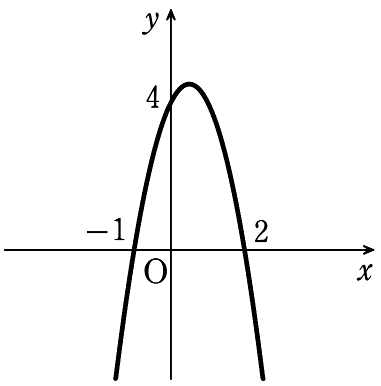
$a-b+4=0$　…… ②

$4a+2b+4=0$　…… ③

②，③ を解くと　$a=-2$，$b=2$

これは ① を満たす。

したがって　$a=-2$，$b=2$



$\boxed{6}$ $x^2-ax-2a^2=(x+a)(x-2a)$ より，放物線 $y=x^2-ax-2a^2$ は，x 軸と 2 点 $(-a,\ 0)$，$(2a,\ 0)$ で交わる。

(1)　$a>0$ のとき　$-a<2a$

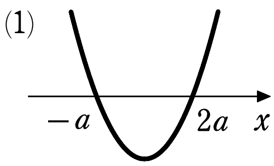
このとき，2 次不等式の解は

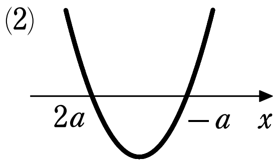
$-a<x<2a$

(2)　$a<0$ のとき　$2a<-a$

このとき，2 次不等式の解は

$2a<x<-a$





$\boxed{7}$ 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2=0$，$x^2+2ax+2a=0$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(a+1)^2-4\cdot 1\cdot a^2=-3a^2+2a+1$$

$$D_2=(2a)^2-4\cdot 1\cdot 2a=4(a^2-2a)$$

ともに実数解をもつのは，$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$ のときである。

$D_1\geqq 0$ から　　$-3a^2+2a+1\geqq 0$

よって　　$3a^2-2a-1\leqq 0$

すなわち　　$(a-1)(3a+1)\leqq 0$

これを解くと　$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$　…… ①

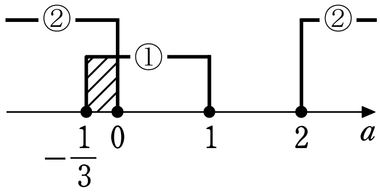
$D_2\geqq 0$ から　　$a^2-2a\geqq 0$

すなわち　　$a(a-2)\geqq 0$

これを解くと　$a\leqq 0$，$2\leqq a$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$$



$\boxed{8}$ 2 次方程式 $x^2-2ax+a=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot a=4(a^2-a)$$

2 次関数の x^2 の係数が正であるから，y の値が常に正であるのは $D<0$ のときである。

$a^2-a<0$ から　　$a(a-1)<0$

これを解いて　　$0<a<1$

別解　$x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$ より，2 次関数 $y=x^2-2ax+a$ は，$x=a$ で最小値 $-a^2+a$ をとる。

y の値が常に正であるのは $-a^2+a>0$ のときである。

不等式の両辺に -1 を掛けて　$a^2-a<0$　すなわち　$a(a-1)<0$

これを解いて　　$0<a<1$