$\boxed{1}$

(1)　$x^2-xy-12y^2+2x+13y-3$

$=x^2+(-y+2)x-(12y^2-13y+3)$

$=x^2+(-y+2)x-(4y-3)(3y-1)$

$=(x+3y-1)(x-4y+3)$

(2)　$|2x-3|\geqq 5$ から

$2x-3\leqq -5$，$5\leqq 2x-3$

よって，$x\leqq -1$，$4\leqq x$

(3)　対偶は「$x=0$ または $x=2$」ならば「$x^2-2x=0$」

対偶は真より，もとの命題も真。

(4)　もとの放物線は $y=2x^2+6x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 平行移動したものである。

$y=2x^2+6x$

$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$ より，頂点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)$ を x 軸方向に -1，

y 軸方向に 2 平行移動すると，$\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ より，求める放物線の

方程式は，$y=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}=2x^2+10x+10$

別解

$y=2x^2+6x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 平行移動すると

$y-2=2(x+1)^2+6(x+1)$ より

$y=2x^2+10x+10$

(5)　関数 $y=mx^2+4x+m-3$ において，

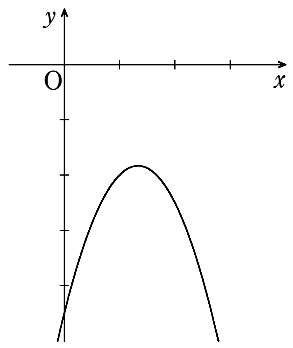
y の値が常に負となるとき

グラフは上に凸より，$m<0$ …①

グラフは x 軸と共有点をもたないから，

$mx^2+4x+m-3=0$ の

判別式を D とすると，$D<0$ となる。



$\dfrac{D}{4}=4-m(m-3)<0$

$m^2-3m-4>0$

$(m+1)(m-4)>0$

$m<-1$，$4<m$ …②

①，②より求める m の値の範囲は，$m<-1$

(6)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を２乗して

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

よって，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

(7)　データを小さい順に並べると

5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 11, 13, 14, 15, 15

(i)　平均値は

$\dfrac{1}{20}(5\times 2+6\times 3+7\times 3+8\times 2+9\times 5+11+13+14+15\times 2)$

$=\dfrac{178}{20}=8.9$

(ii)　データは偶数個あるから，中央値は小さいほうから10番目と11番目の平均値となる。

よって，$\dfrac{8+9}{2}=8.5$

(8)

(i)　女子４人をまとめて１人と考え，5人を円形に並べ，女子４人の並べ替えも考えて

$(5-1)!\times 4!=576$（通り）

(ii)　男子4人を円形に並べ，その間に女子４人を並べて

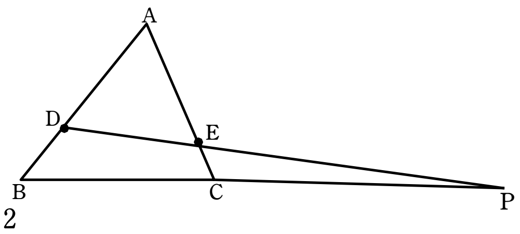
$(4-1)!\times 4!=144$（通り）

(9)　$\triangle ABC$ と直線 DP について，メネラウスの定理から

$\dfrac{BP}{PC}\dfrac{CE}{EA}\dfrac{AD}{DB}=1$

$\dfrac{BP}{PC}\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{1}=1$

$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{2}$



よって，$BP:PC=3:2$

(10)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ の両辺に $5xy\,(>0)$ をかけて

$5y+5x=xy$

$(x-5)(y-5)=25$

$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ より

$x-5\geqq -4$，$y-5\geqq -4$

よって，$(x-5,\ y-5)=(1,\ 25)$，$(5,\ 5)$，$(25,\ 1)$

ゆえに，$(x,\ y)=(6,\ 30)$，$(10,\ 10)$，$(30,\ 6)$

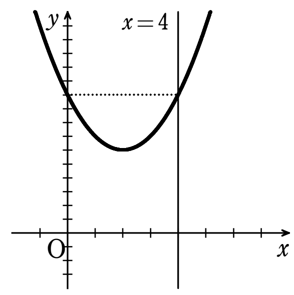
$\boxed{2}$

$y=x^2-4x+a$

$=(x-2)^2-4+a$

$0\leqq x\leqq 4$ より，

$x=0,\ 4$ で最大値 a となる。



よって，$a=10$

$\boxed{3}$

四角形ABCDは平行四辺形より，

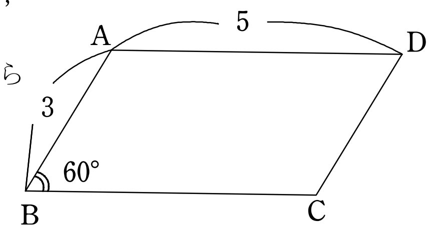
BC$=5$，$\angle A=120°$

$\triangle ABC$ において，余弦定理から

$AC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 60°$

$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}$

$=19$



$AC>0$ より，$AC=\sqrt{19}$

$\triangle ABD$ において，同様に

$AD^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120°$

$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=49$

$AD>0$ より，$AD=7$

$\boxed{4}$

1 枚の硬貨を投げて，表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$

また，硬貨を 6 回投げたとき，表が x 回出るとき，裏は $(6-x)$ 回出る。

硬貨を 6 回投げたとき，点 P が原点にあるから

$x-(6-x)=0$ より $x=3$

よって，求める確率は

${}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$